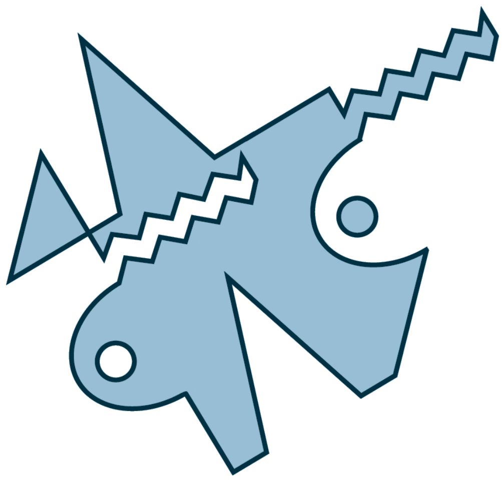
7 RAZISKOVALEC

Darjo Felda
Olga Arnuš
Matilda Jakob
Vilko Domajnko

MATEMATIČNA DELAVNICA 7

PRIROČNIK ZA UČITELJA



DZS

Priročnik so napisali
mag. Darjo Felda, Olga Arnuš, prof., Matilda Jakob, prof. in Vilko Domajnko, prof.

MATEMATIČNA DELAVNICA 7

Priročnik za učitelja

Rokopis sta strokovno pregledali **mag. Marija Vencelj** in **Marija Gorup, prof.**
Rokopis je jezikovno pregledala **Vlasta Kunej**

znanje uresničuje sanje
DZS, d.d., DIVIZIJA ZALOŽNIŠTEV
IZOBRAŽEVALNO ZALOŽNIŠTVO
http://www.dzs.si
e-pošta: info.narocila@dzs.si
tel. št.: 01/ 230 96 50
01/ 230 96 54

Tehnične risbe izdelal **Simon Kajtna**

Uredila **Soraya Sternad**
Likovno grafično uredil **Simon Kajtna**

Izdala in založila **DZS, d. d.**
Za založbo **Bojan Petan**
Za Divizijo založništev **Ada de Costa Petan**
Glavna urednica **Tanja Železnik**

Oblikovanje in računalniški prelom **KULT, oblikovalski studio, Simon Kajtna, s. p.**
Ljubljana 2005
Prva izdaja

ISBN 86-341-4100-4
9 788634 141009

Računi z vžigalicami

Nekatere naloge iz tega poglavja imajo več rešitev. Zato ni izključeno, da ta seznam rešitev ni popoln. Morda bo reševalec našel tudi katero novo.

1.

a) IV + I = V

b) V − III = II ali IV − III = I

c) V + IV = IX ali VI + IV = X

č) VI = V + I

d) VIII − III = V ali VIII − II = VI ali VIII + II = X

e) IX − III = VI

f) X − VII = III

g) XI − V = VI ali XI − VI = V

h) XII − IX = III

i) XIII − VII = VI

j) XV + V = XX

k) XVII − V = XII ali XVII − VI = XI

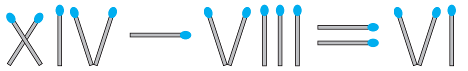
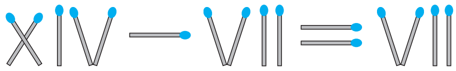
2.

a) I + II = III

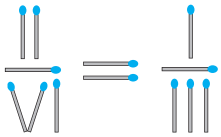
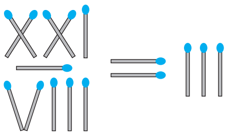
b) IX − VI = III ali X − VII = III

3.

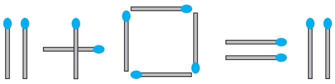
a) IV + II = VI ali IX + II = XI ali
X − III = VII ali IX − II = VII

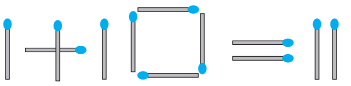
b)  ali 

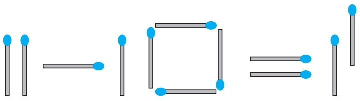
4. Poglej na enačbo tako, da zasučeš zvezek za 180°.

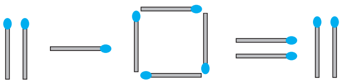
5. a)  b) 

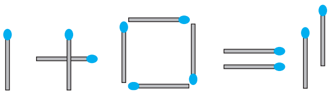
6. Števila v tej nalogi moramo brati v indoarabskem zapisu.

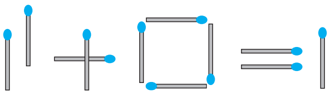
a)  (11 + 0 = 11)

ali  (1 + 10 = 11)

ali  ($11 - 10 = 1^1$)

b)  (11 – 0 = 11)

ali  ($1 + 0 = 1^1$)

ali  ($1^1 + 0 = 1$)

Računi z dominami

Računi z dominami

1. $$\begin{array}{r} 4\;1\;5 \\ \times\quad 4 \\ \hline 1\;6\;6\;0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\;5\;4 \\ \times\quad 6 \\ \hline 3\;3\;2\;4 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} 6 \\ +\;6 \\ \hline 1\;2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\;3 \\ +\;5\;3\;6 \\ +\;6\;5\;3 \\ \hline 1\;2\;2\;2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} 1 \\ +\;3 \\ +\;4 \\ +\;1\;4 \\ \hline 2\;2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ +\;0\;4 \\ +\;0\;4 \\ +\;1\;3 \\ \hline 2\;3 \end{array} \quad \text{ali} \quad \begin{array}{r} 2 \\ +\;1\;4 \\ +\;0\;4 \\ +\;0\;3 \\ \hline 2\;3 \end{array} \quad \text{ali} \quad \begin{array}{r} 2 \\ +\;0\;4 \\ +\;1\;4 \\ +\;0\;3 \\ \hline 2\;3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\;0\;4\;1 \\ +\;2\;0\;6\;1 \\ \hline 3\;1\;0\;2 \end{array} \quad \text{ali} \quad \begin{array}{r} 2\;0\;4\;1 \\ +\;1\;0\;6\;1 \\ \hline 3\;1\;0\;2 \end{array} \quad \text{ali} \quad \begin{array}{r} 2\;0\;4\;1 \\ +\;2\;0\;6\;1 \\ \hline 3\;1\;0\;2 \end{array} \quad \text{ali} \dots$$

Zgornja naloga ima precej rešitev. Iščemo jih med primeri, kjer je vsota prvi dveh števk v obeh seštevancih (gledano z leve) enaka števki pod njima.

Nenavadna aritmetika

```
      4 6                 4 1
×   0 5 6     ali   ×   0 6 1
  -------             -------
  0 1 0 2             0 1 0 2
```

4.

```
    4 0 1        6 3 3        5 5 4        2 2 3
×       3    ×       4    ×       6    ×       5
  -------      -------      -------      -------
  1 2 0 3      2 5 3 2      3 3 2 4      1 1 1 5
```

Zbrisani računi

1.

```
    2 8 9
+   7 6 4
  -------
  1 0 5 3
```

2.

```
2 8 · 1 1
---------
7 5
  7 5
-----
8 2 5
```

Najprej ugotovimo, da je lahko faktor na desni v prvi vrstici samo 11, saj bi sicer števili v drugi in tretji vrstici ne bili dvomestni. Ker je zadnja števka rezultata enaka 5, je tudi zadnja števka prvega faktorja 5. Zmnožimo 75 in 11 in zapolnimo druga prazna mesta.

3.

```
  9 9 · 9 1
-----------
8 9 1
    9 9
-------
9 0 0 9
```

Tudi v tem primeru najprej spoznamo, da je lahko faktor na desni le 91, sicer bi bilo število v tretji vrstici zagotovo trimestno. To pomeni, da se tudi število v tretji vrstici začne z 9. Nadalje opazimo, da se mora število v drugi vrstici začeti z 8, saj se z 8 začne vsak zmnožek števila 9 z dvomestnim številom, ki je večje ali enako 90. Ker se zmnožek v četrti vrstici začne z 9, je lahko sredinsko število v drugi vrsti le 9. To pa že pomeni, da je lahko faktor na levi v prvi vrstici le 99, kajti sicer ne bi dobili v drugi vrstici števila, ki je vsaj 890. S tem podatkom spet zlahka zapolnimo še druga mesta.

4.

```
  1 2 3 7 · 8 9 3
-----------------
  9 8 9 6
  1 1 1 3 3
      3 7 1 1
-------------
1 1 0 4 6 4 1
```

Z uporabo podatkov iz tretje vrstice računa najprej ugotovimo

```
  □ □ 3 7 · □ 9 3
-----------------
  9 □ 9 6
  □ □ □ 3 3
      3 7 □ □
-------------
□ □ □ □ 6 □ □ ,
```

zatem

```
   □ □ 3 7 · □ 9 3
   9 □ 9 6
   □ □ □ 3 3
       3 7 1 1
 □ □ □ □ 6 □ □
```

in

```
   1 2 3 7 · □ 9 3
   9 □ 9 6
   □ □ □ 3 3
       3 7 1 1
 □ □ □ □ 6 □ □,
```

in tako naprej.

5.

```
   2 3 7 · 5 8
 1 1 8 5
   1 8 9 6
 1 3 7 4 6
```

Najprej ugotovimo osmico v drugi vrstici. Zatem zlahka pridemo do začetne dvojke v prvem faktorju. Nato ugotovimo še osmico v drugem faktorju in dokončamo račun.

6.

```
 3 6 4 · 2 7
 7 2 8
 2 5 4 8
 9 8 2 8
```

Najprej ugotovimo števila v tretji vrstici računa:

```
 □ □ □ · 2 □
 □ 2 8
 2 5 4 8
 □ 8 2 8
```

Poiščemo vse razcepe števila 2548, v katerih je en faktor enomesten, drugi pa trimesten:

$$2548 = 4 \cdot 637 = 7 \cdot 364$$

Ker se prvi faktor v računu nujno konča bodisi na 4 ali na 9, pomeni tretja vrstica v računu $2548 = 7 \cdot 364$. Torej je drugi faktor v prvi vrstici 27, prvi pa 364. Od tod zlahka rekonstruiramo preostanek računa.

7.

```
     1 2 3 4 5 6 7 9
 +   9 8 7 6 5 4 3 2
   1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
   1 2 3 4 5 6 7 9 · 9          7 7 7 7 7 7 7 7 7 : 7
 1 1 1 1 1 1 1 1 1              1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

Sto

1. a) $123 - 45 - 67 + 89 = 100$
b) $123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$
c) $123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$
č) $123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$
d) $12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100$
e) $12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100$
f) $1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100$
g) $1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 100$
h) $1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$
i) $1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$

2. a) $1 \cdot 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 = 100$
b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 5 + 6 + 7 \cdot 8 + 9 = 100$
c) $1 + 23 \cdot 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 = 100$

Opomba:
To nalogo je v matematični literaturi prvi zastavil znameniti angleški sestavljavec ugank **Henry E. Dudeney** (1847–1930) v svojem delu *Amusements in Mathematics* iz leta 1917. Tam najdemo še eno rešitev naloge, ki sicer ni uvrščena v ta razdelek:

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

Katera števka

1. Zapovrstjo preverjamo, ali števke 0, 1, 2, 3 … morebiti zadoščajo računu na mestu števke *c*. Prva števka, ki mu zadošča, je šele 8. Za njo tudi 9 več ne zadošča. Od tod ni več težko sestaviti celotnega računa. Edina rešitev je taka:

$$\begin{array}{r} 148 \cdot 3 \\ \hline 444 \end{array}$$

2. Število $\overline{10a0a}$ mora biti deljivo z 9, in prav tako tudi vsota števk $2a + 1$. Edina možnost je $a = 4$.
Z vstavljanjem jo potrdimo: $(3 \cdot 34)^2 = 10\,404$.

3. a) Iz prve števke v spodnji vrstici računa sklepamo, da je mogoče samo $b = 2$ ali $b = 1$. Da bi bil $b = 2$, bi morala biti $a = 9$ in $c = 8$ ali obrnjeno. S preverjanjem ugotovimo, da nobena od teh možnosti ne ustreza računu. Preverimo še: $b = 1$. Tedaj je v zadnjem stolpcu na desni $a + 1 + c = c$. Od tod sklepamo, da je bodisi $a + 1 = 0$ ali pa $a + 1 = 10$. Prva možnost seveda ne pride v poštev, iz druge pa dobimo $a = 9$. Iz drugega stolpca z desne podobno ugotovimo tudi to, da je $c = 8$.
Tako sestavimo rešitev:

$$\begin{array}{r} 9999 \\ +\ 1111 \\ +\ 8888 \\ \hline 19998 \end{array}$$

b) Iz prve števke v vsoti na desni sklepamo, da je lahko samo $a = 2$ ali $a = 3$. Po krajšem premisleku spoznamo, da druga možnost ne pride v poštev. Iz prve zlahka dobimo edino rešitev naloge:

$$271 + 27 + 2 = 300$$

4. Preverimo vse dvomestne kvadrate {16, 25 … 81}. Tako dobimo edino rešitev:

$$(8 + 1)^2 = 81$$

5. Edini kub dvomestnega števila z enakima števkama, ki je štirimestno število, dobimo v primeru

$$11^3 = 1331$$

Na srečo ta tudi zadošča pogoju naloge.

Kako so množili stari Egipčani

1.

35	1
~~70~~	~~2~~
~~140~~	4
280	8
560	16

875 25

$35 \cdot 25 = 875$

~~14~~	~~1~~
28	2
56	4
112	8

196 14

$14 \cdot 14 = 196$

47	1
~~94~~	~~2~~
~~188~~	4
376	8
~~752~~	~~16~~
1504	32

1927 41

$47 \cdot 41 = 1927$

~~64~~	~~1~~
128	2
~~256~~	4
~~512~~	~~8~~
1024	16
2048	32

3200 50

$64 \cdot 50 = 3200$

~~29~~	~~1~~
~~58~~	~~2~~
116	4
~~232~~	~~8~~
464	~~16~~
928	32
1865	64

2900 100

$29 \cdot 100 = 2900$

~~137~~	~~1~~
274	2
548	4
1096	8
~~2192~~	~~16~~
~~4384~~	~~32~~
8768	64

10686 78

$137 \cdot 78 = 10686$

2. Množenje po poti starih Egipčanov je posebno primerno pri računanju zmnožka $48 \cdot 32$, izračun zmnožka $50 \cdot 30$ pa je izrazito ugoden za množenje po današnjem postopku. O tretjem računu $52 \cdot 28$ pa ne moremo reči, da bi bil posebno ugoden v katerem koli od obeh načinov množenja.

3. Za izračun zmnožka $29 \cdot 100$ v tem vrstnem redu faktorjev potrebujemo v egipčanskem postopku sedem vrstic v preglednici, v vrstnem redu $100 \cdot 29$ pa le pet.

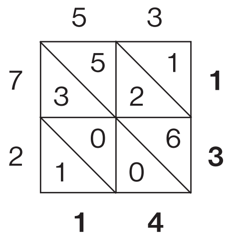
100	1
~~200~~	~~2~~
400	4
800	8
1600	16

2900 29

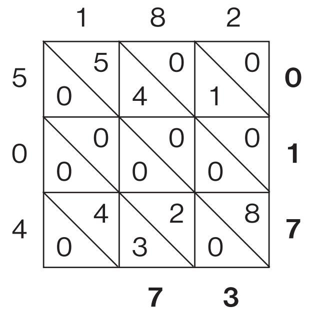
$100 \cdot 29 = 2900$

Nasploh je večinoma ugodno računati zmnožke po egipčanskem postopku tako, da pripada desni stolpec manjšemu od obeh faktorjev.

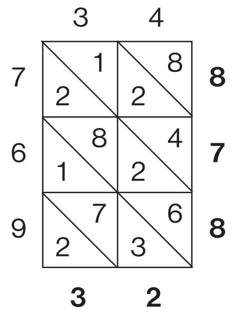
Kako so množili stari Indijci



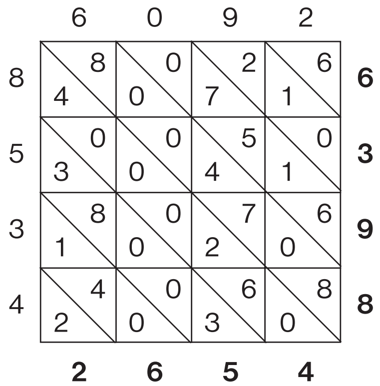
53 · 27 = 1431



182 · 405 = 73710



34 · 967 = 32878



6092 · 4358 = 26548936

Zanimiva števila

1. **a)** $1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$

b) $1^3 + 0^3 + 7^3 = 1 + 0 + 343 = 344 \neq 107$

$3^3 + 5^3 + 7^3 = 27 + 125 + 343 = 495 \neq 357$

$4^3 + 0^3 + 7^3 = 64 + 0 + 343 = 407$

c) $3^3 + 7^3 + 0^3 = 27 + 343 + 0 = 370$

$3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1 = 371$

Opomba

Na ta zanimiva števila je prvi opozoril angleški matematik **Godfrey H. Hardy** (1877–1947) v delu *A Mathematician's Apology*. Tam pravi:

Samo štiri števila, poleg enice, so enaka vsoti kubov svojih števk. To je redka lastnost, primerna za naloge v ugankarskih kotičkih in vsekakor zabavna za ugankarje, saj v vsem skupaj pravzaprav ni veliko matematike.

2. **a)** $8^1 + 9^2 = 8 + 81 = 89$

$5^1 + 1^2 + 8^3 = 5 + 1 + 512 = 518$

$1^1 + 6^2 + 7^3 + 6^4 = 1 + 36 + 343 + 1296 = 1676$

b) Opisano lastnost imajo prav vsa števila:

$135 = 1^1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135$

$175 = 1^1 + 7^2 + 5^3 = 1 + 49 + 125 = 175$

$598 = 5^1 + 9^2 + 8^3 = 5 + 81 + 512 = 598$

$1306 = 1^1 + 3^2 + 0^3 + 6^4 = 1 + 9 + 0 + 1296 = 1306$

$2427 = 2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4 = 2 + 16 + 8 + 2401 = 2427$

3. **a)** $88^2 + 33^2 = 7744 + 1089 = 8833$

b) $12^2 + 33^2 = 144 + 1089 = 1233$

$4^2 + 455^2 = 16 + 207\,025 = 207\,041 \neq 4455$

$44^2 + 55^2 = 1936 + 3025 = 4961 \neq 4455$

$445^2 + 5^2 = 198\,025 + 25 = 198\,050 \neq 4455$

c) $588^2 + 2353^2 = 345\,744 + 5\,536\,609 = 5\,882\,353$

4. **a)** $22^3 + 18^3 + 59^3 = 10\,648 + 5832 + 205\,379 = 221\,859$

b) $16^3 + 50^3 + 33^3 = 4096 + 125\,000 + 35\,937 = 165\,033$
$3^3 + 4^3 + 85^3 = 27 + 64 + 614\,125 = 614\,216 \neq 3485$
$3^3 + 48^3 + 5^3 = 27 + 110\,592 + 125 = 110\,744 \neq 3485$
$34^3 + 8^3 + 5^3 = 39\,304 + 512 + 125 = 39\,941 \neq 3485$

c) $4^3 + 18^3 + 33^3 = 64 + 5832 + 35\,937 = 41\,833$

Opomba
Na zanimiva števila, ki so enaka vsoti kvadratov ali pa kubov posameznih zaporednih delov iz svojega zapisa, je prvi opozoril angleški enigmatik in sestavljavec ugank **J. A. Lindon**.

Zanimive številske dvojice

1. $(25 + 30)^2 = 55^2 = 3025 \neq 2530$
$\mathbf{(30 + 25)^2 = 55^2 = 3025}$
$(47 + 51)^2 = 98^2 = 9604 \neq 4751$
$(51 + 47)^2 = 98^2 = 9604 \neq 5147$
$(11 + 88)^2 = 99^2 = 9801 \neq 1188$
$(88 + 11)^2 = 99^2 = 9801 \neq 8811$

2. $(1729 + 6048)^2 = 7777^2 = 60\,481\,729 \neq 17\,296\,048$
$\mathbf{(6048 + 1729)^2 = 7777^2 = 60\,481\,729}$
$(1984 + 5288)^2 = 7272^2 = 52\,881\,984 \neq 19\,845\,288$
$\mathbf{(5288 + 1984)^2 = 7272^2 = 52\,881\,984}$

Poskusi s števili

1. $155 = 77 + 78$
$342 = 113 + 114 + 115$
$118 = 28 + 29 + 30 + 31$
$555 = 109 + 110 + 111 + 112 + 113$
$249 = 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44$
$385 = 52 + 53 + \ldots + 58$

2. $182 = 13 \cdot 14$
$3306 = 57 \cdot 58$
$15\,252 = 123 \cdot 124$
$210 = 5 \cdot 6 \cdot 7$
$4896 = 16 \cdot 7 \cdot 18$
$29\,760 = 30 \cdot 31 \cdot 32$

3. $4{,}5 = 9 : 2$
$1{,}125 = 9 : 8$
$0{,}5555555 = 5 : 9$
$0{,}2857142 = 2 : 7$
$1{,}46 = 73 : 50$
$8{,}25 = 99 : 12$
$0{,}4333333 = 13 : 30$
$1{,}0344827 = 30 : 29$

Številska veriga

1. $21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$

2. $61 \to 62 \to 31 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

3. $48 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$

4. $33 \to 34 \to 17 \to 18 \to 9 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$

5. $65 \to 66 \to 33 \to 34 \to 17 \to 18 \to 9 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$

Opomba
Denimo, da nameravamo sestaviti verigo z začetnim členom, v katerem število ne bo večje od *n*. Za to, da dobimo najdaljšo mogočo verigo, moramo poiskati največje število oblike $2^m + 1$, ki je še manjše od *n*, in začeti z njim.

Idealne vsote

$7 = 3 + 4 = 2 + 2 + 3 \quad \to \quad 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

$10 = 3 + 3 + 4 = 2 + 2 + 3 + 3 \quad \to \quad 3 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

$12 = 3 + 3 + 3 + 3 \quad \to \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \quad \to \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

Ugani pravilo

1. **a)** 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 …
Vsak člen zaporedja je za 3 večji od prejšnjega.

b) 7, 19, 31, 43, 55, 67, 79, 91 …
Vsak člen zaporedja je za 12 večji od prejšnjega.

c) $5, \frac{13}{2}, 8, \frac{19}{2}, 11, \frac{25}{2}, 14, \frac{31}{2}$ …
Vsak člen zaporedja je za $\frac{3}{2}$ večji od prejšnjega.

č) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384 …
Vsak člen zaporedja je dvakrat tolikšen, kakor tisti pred njim.

d) $4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}, \frac{729}{16}, \frac{2187}{32}$ …
Vsak člen zaporedja dobimo tako, da tistega pred njim množimo s $\frac{3}{2}$.

e) 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 …
Zaporedje sestavljajo kubi zaporednih naravnih števil: $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ …

Nenavadna aritmetika

f) 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99 …
Napišimo zaporedje kvadratov naravnih števil:
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 …
Zaporedje iz naloge dobimo, če vsak člen v tem zaporedju zmanjšamo za 1.

g) 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023 …
Napišimo zaporedje potenc števila 2:
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 …
Zaporedje iz naloge dobimo, če vsak člen v tem zaporedju zmanjšamo za 1.

h) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 …
Vsak člen v zaporedju (razen prvih dveh) je vsota obeh členov pred njim.

2.

Člen	Število trikotnikov	Število vžigalic
1.	**1**	**3**
2.	1 + 3 = **4**	3 + 2 · 3 = **9**
3.	4 + 5 = **9**	9 + 3 · 3 = **18**
4.	9 + 7 = **16**	18 + 4 · 3 = **30**
5.	16 + 9 = **25**	30 + 5 · 3 = **45**
6.	25 + 11 = **36**	45 + 6 · 3 = **63**

2. **a)** V nizu z 10 kvadrati je 2 · 10 + 11 = 31 vžigalic.
V nizu z 11 kvadrati je 2 · 11 + 12 = 34 vžigalic.
V nizu s 50 kvadrati je 2 · 50 + 51 = 151 vžigalic.
b) V nizu s 16 kvadrati je 3 · 8 + 2 · 9 = 42 vžigalic.
V nizu z 18 kvadrati je 3 · 9 + 2 · 10 = 47 vžigalic.
V nizu s 50 kvadrati je 3 · 25 + 2 · 26 = 127 vžigalic.
c) V kvadratu, katerega stranica meri 5 vžigalic, je 5 · 6 + 6 · 5 = 60 vžigalic.
V kvadratu, katerega stranica meri 6 vžigalic, je 6 · 7 + 7 · 6 = 84 vžigalic.
V kvadratu, katerega stranica meri 8 vžigalic, je 8 · 9 + 9 · 8 = 144 vžigalic.

Kakor koli že izbiraš, računa ne ukaneš

1. 1 · 9 · 12 345 679 = 111 111 111
2 · 9 · 12 345 679 = 222 222 222
3 · 9 · 12 345 679 = 333 333 333
4 · 9 · 12 345 679 = 444 444 444
5 · 9 · 12 345 679 = 555 555 555
6 · 9 · 12 345 679 = 666 666 666
7 · 9 · 12 345 679 = 777 777 777
8 · 9 · 12 345 679 = 888 888 888
9 · 9 · 12 345 679 = 999 999 999

2. Pojasnilo: $a \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = a \cdot 9 \cdot \frac{111\,111\,111}{9} = \overline{aaa\,aaa\,aaa}$

4. 1 · 7 · 15 873 = 111 111
2 · 7 · 15 873 = 222 222
3 · 7 · 15 873 = 333 333
4 · 7 · 15 873 = 444 444
5 · 7 · 15 873 = 555 555
6 · 7 · 15 873 = 666 666
7 · 7 · 15 873 = 777 777
8 · 7 · 15 873 = 888 888
9 · 7 · 15 873 = 999 999

Pojasnilo: $a \cdot 7 \cdot 15\,873 = a \cdot 7 \cdot \frac{111\,111}{7} = \overline{aaa\,aaa}$

Nenavadna aritmetika

Presenetljivo lepi zmnožki

1.

$$3 \cdot 4 = 12$$
$$33 \cdot 34 = 1122$$
$$333 \cdot 334 = 111222$$
$$3333 \cdot 3334 = 11112222$$
$$33\,333 \cdot 33\,334 = 1\,111\,122\,222$$
$$333\,333 \cdot 333\,334 = 111\,111\,222\,222$$
$$3\,333\,333 \cdot 3\,333\,334 = 1\,111\,111\,122\,222\,222$$

. . . .

3. Pravilo se nadaljuje v nedogled. Pojasnilo:

$$\begin{aligned} 3333 \cdot 3334 &= 3 \cdot 1111 \cdot (3 \cdot 1111 + 1) \\ &= 1111 \cdot (9 \cdot 1111 + 3) \\ &= 1111 \cdot (9999 + 3) \\ &= 1111 \cdot 10002 \\ &= 1111 \cdot (10\,000 + 2) \\ &= 11\,110\,000 + 2222 \\ &= 11\,112\,222 \end{aligned}$$

Računajmo hitreje

Pravilo velja v vseh navedenih primerih:

$25^2 = 2 \cdot 3 \cdot 100 + 25 = 625$,
$55^2 = 5 \cdot 6 \cdot 100 + 25 = 3025$,
$85^2 = 8 \cdot 9 \cdot 100 + 25 = 7225$,
$35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25 = 1225$
$65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25 = 4225$
$95^2 = 9 \cdot 10 \cdot 100 + 25 = 9025$

Pravilo velja tudi v vseh teh primerih:

$125^2 = 12 \cdot 13 \cdot 100 + 25 = 15\,625$
$435^2 = 43 \cdot 44 \cdot 100 + 25 = 189\,225$
$655^2 = 65 \cdot 66 \cdot 100 + 25 = 429\,025$
$705^2 = 70 \cdot 71 \cdot 100 + 25 = 497\,025$
$1265^2 = 126 \cdot 127 \cdot 100 + 25 = 1\,600\,225$

Opisano pravilo kvadriranja je vsekakor primerno, če kvadriramo na pamet dvomestna števila. Pri tri- ali večmestnih številih ga naj uporabljajo le tisti, ki zmorejo.

Opomba:
Opisano pravilo kvadriranja velja za vsa števila, ki se končajo na 5. Poglejmo.
Naj bo a število, ki se konča na 5. Zapišemo ga lahko z $a = 10b + 5$, pri tem je b neko naravno število.
Tedaj je

$$a^2 = (10b + 5)^2 = 100b^2 + 2 \cdot 10b \cdot 5 + 25 = 100b^2 + 100b + 25 = b(b + 1) \cdot 100 + 25$$

In prav to je bilo treba dokazati.

Nenavadna aritmetika

41 · 11 → 4 $\underline{4+1}$ 1 → 451
54 · 11 → 5 $\underline{5+4}$ 4 → 594
60 · 11 → 6 $\underline{6+0}$ 0 → 660
78 · 11 → 7 $\underline{7+8}$ 8 → 858
37 · 11 → 3 $\underline{3+7}$ 7 → 407
92 · 11 → 9 $\underline{9+2}$ 2 → 1012

Opisani postopek hitrega množenja je v bistvu enak običajnemu postopku pri pisnem računanju (tako imenujemo računanje brez uporabe računala, ko si pomagamo zgolj s svinčnikom in papirjem), le da je zapisovanje posameznih števk organizirano nekoliko drugače. Vse bo jasno, če si takšno računanje ogledamo v eni in drugi različici na izbranem zgledu. Vzemimo kar enega od računov iz prejšnje naloge:

$$\begin{array}{l}
\underline{54 \cdot 11} \\
5\mathbf{4} \\
\;\;\underline{\mathbf{5}4\;\;} \\
5\mathbf{9}4
\end{array}$$

454 · 11 → 4 $\underline{4+5}\;\underline{5+4}$ 4 → 4994
538 · 11 → 5 $\underline{5+3}\;\underline{3+8}$ 8 → 5918
769 · 11 → 7 $\underline{7+6}\;\underline{6+9}$ 9 → 8459

Ugani število

Pojdimo **v nasprotni smeri** – od končnega rezultata k začetnemu številu. Končni rezultat moramo najprej deliti s 3, zatem to pomnožiti z 2, nato temu odšteti 3 in naposled dobljeno deliti s 3.

549 → 549 : 3 = 183 → 183 · 2 = 366 → 366 – 3 = 363 → 363 : 3 = **121**

Prijatelj si je torej na začetku izbral število 121.
Seveda pa bi lahko računali tudi takole:

((549 : 3) · 2 – 3) : 3 = (183 · 2 – 3) : 3 = (366 – 3) : 3 = 363 : 3 = **121**

15

549 → 61 → 122 → **121**
72 → 8 → 16 → **15**
108 → 12 → 24 → **23**
765 → 85 → 170 → **169**

Opomba:
Denimo, da si je prijatelj zamislil število *n*. Od tod je z računanjem dobil novo število

$$\frac{3n+3}{2} \cdot 3 = \frac{9(n+1)}{2}$$

Da pridemo nazaj do prvotnega skritega števila *n*, moramo torej rezultat $\frac{9(n+1)}{2}$ najprej deliti z 9, zatem ta količnik pomnožiti z 2 in naposled od zmnožka odšteti 1. Prikazana formula ponuja učinkovitejši postopek iskanja začetnega števila glede na računanje v nasprotni smeri, predstavljeno v rešitvi naloge **1a**. Tam smo namreč na poti do rezultata dvakrat delili s 3, to pa je v novi različici poenostavljeno z deljenjem z 9.

Računajmo v nasprotni smeri – od končnega rezultata k začetnemu številu:

73 → 73 + 17 = 90 → 90 : 5 = 18 → 18 – 4 = 14 → 14 : 2 = 7

Prijatelj si je izbral 7.

223 → 240 → 48 → 44 → 22

(**8** · 2 + 4) · 5 – 17 = 83	Zamislil si je število 8.
(**10** · 2 + 4) · 5 – 17 = 103	Zamislil si je število 10.
(**25** · 2 + 4) · 5 – 17 = 253	Zamislil si je število 25.

Opomba:
Naloge o uganjevanju »skritih« števil, predstavljene v tem poglavju, so že od nekdaj priljubljene. Precej jih najdemo že v delu francoskega matematika **Claude de Bacheta** *Zabavni in očarljivi problemi* iz leta 1612. Tudi naši dve nalogi izvirata od tam. Bachet velja za prvega pisca v zgodovini, ki se je nekoliko načrtneje ukvarjal s področjem, ki ga danes večinoma imenujemo razvedrilna matematika.

Štetje

Začetek poglavja je namenjen velikim številom. Ker se takšna števila pogosto uporabljajo, je dobro, da si jih skušajo učenci predstavljati. Seveda smejo pri iskanju odgovorov v nalogah o milijonu in milijardi uporabiti računalo. Ko iščejo podatke o velikosti telovadnice, se lahko poleg učitelja športne vzgoje obrnejo še na hišnika ali tajništvo šole. Najboljše pa je, če gredo v telovadnico in tam izmerijo ustrezne količine.

1. Bral bi 5,7 leta.
2. Milijon ljudi bi postavil na 25 ha veliko površino ali v vrsto, dolgo 500 km.
3. Težko, saj bi moral živeti 114 let.

Milijarda

1. Milijon minut je 1,9 leta, milijon sekund pa 11,6 dneva.
2. Polica bi morala biti dolga 10 000 km, to je četrt Zemljinega ekvatorja.
   Polica bi bila lahko krajša za 9990 km.
3. Za milijon knjig bi potrebovali 125 takšnih knjižnic, za milijardo knjig pa 125 000.
4. Ne. Prekrili bi površino 6000 km^2.

Makova glavica

a) tretje leto: $27 \cdot 10^9$
b) četrto leto: $81 \cdot 10^{12}$
c) peto leto: $243 \cdot 10^{15}$
V naravi ni tako čudežno hitrega razmnoževanja, saj iz mnogih semen ne zrasejo nove rastline. Nekatera semena ne padejo na primerna tla in zato ne vzklijejo, druga po vzklitju zadušijo večje rastline, mnoga pa pojedo živali.

1. Da. Lahko bi vzklilo $6 \cdot 10^8$ rastlin.
2. Da. Vzklilo bi lahko $4 \cdot 10^{13}$ rastlin.

Zraslo bi: 3. leto 10^4 stebelc, 4. leto 10^6 stebelc, 5. leto 10^8 stebelc, 6. leto 10^{10} stebelc, 7. leto 10^{12} stebelc, 8. leto 10^{14} stebelc, 9. leto 10^{16} stebelc, 10. leto 10^{18} stebelc.

1. Njivo velikosti 30 ha bi prekrile v petem letu.
2. Površino Slovenije bi prekrile v osmem letu.
3. Regratove lučke bi deveto leto prekrile vse kopno sveta.

Trikotniška števila

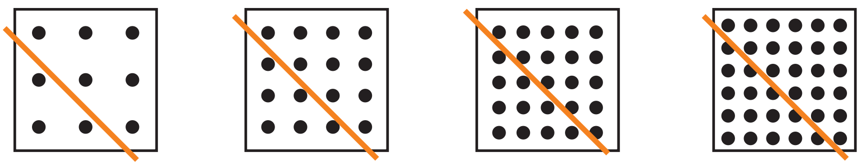
1. $T_8 = 36$, $T_{12} = 78$
2. 21, 28, 36, 45
   Vsaka naslednja razlika je za 1 večja od prejšnje.

Štetje

3. $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$
   Vsota nekaj zaporednih naravnih števil od 1 naprej je vedno trikotniško število.
4. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
5. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$, $10 \cdot 11 : 2 = 55$
   Vsota desetih zaporednih naravnih števil je deseto trikotniško število, ki ga dobimo po formuli tako, da število 10 pomnožimo z njegovim naslednikom (številom 11) in dobljeni zmnožek delimo z dve.
6. Vsota vseh naravnih števil od 1 do 30 je 465.
7. Vsota vseh naravnih števil od 1 do 100 je 5050.
8. Po 40 dneh je imel 820 srebrnikov.
9. Gauss je ugotovil, da so vsote prvega in zadnjega števila, drugega in predzadnjega … tridesetega in enaintridesetega enake: $1 + 60 = 61$, $2 + 59 = 61$, … $30 + 31 = 61$. Končni rezultat je 30 takih vsot ali $30 \cdot 61 = 1830$. Očitno je 8-letni Gauss na pamet izpeljal formulo za *n*-to trikotniško število.
10. $1 + 3 + 10 = 14$, $6 + 15 + 28 = 49$
11. $45 + 55 = 100$, $6 + 28 + 66 = 100$
12. Ne.
13. Da. Število 21 je šesto trikotniško število.

Kvadratna števila

1. $K_9 = 81$, $K_{12} = 144$
2. Da, ker je $6^2 = 36$.
   Število 65 ni kvadratno število.
3. $14 = 1 + 4 + 9$, $50 = 1 + 49 = 9 + 16 + 25 = 1 + 4 + 9 + 36$
   Število 14 lahko zapišemo le kot vsoto treh kvadratnih števil.
4. 9 16 $10 + 15 = 25$ $15 + 21 = 36$



Da. Vsota dveh zaporednih trikotniških števil je kvadratno število.

5. $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$
   $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$
   $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5 \cdot 5 = 5^2$
   $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6 \cdot 6 = 6^2$
   $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7 \cdot 7 = 7^2$
   Npr.: če seštejemo dve, tri, štiri začetna zaporedna liha števila, dobimo drugo, tretje, četrto kvadratno število. Če seštejemo pet lihih števil, je njihova vsota peto kvadratno število, itn.
   Dobim kvadratna števila.

6. $8^2 = 64$, $11^2 = 121$

7. Kvadratno število.
   Npr.

9	12
12	16

Vsota je 49; $49 = 7^2$.

16	20
20	25

Vsota je 81; $81 = 9^2$.

Vsota štirih takih števil je kvadratno število.

4	6	8
6	9	12
8	12	16

Vsota je 81; 81 = 9^2.

9	12	15
12	16	20
15	20	25

Vsota je 144 · 144 = 12^2, torej tudi kvadratno število.

Da. Tudi vsota števil v kvadratu, ki ima na diagonali štiri (pet) števila, je kvadratno število.

Različne možnosti

1. Na 2 načina.
   Na 4 načine.
2. Na 6 načinov.
   Na 27 načinov.
3. Na 24 načinov.
4. Hiša ima lahko 6 oken (2 trikotni in 4 štirikotna okna, ker velja 2 · 3 + 4 · 4 = 22) ali 7 oken (6 trikotnih in 1 štirikotno okno, ker velja 6 · 3 + 1 · 4 = 22).
   V hiši je lahko najmanj 6 in največ 7 oken. Samo trikotna ali samo štirikotna okna niso mogoča.

Pri peti in šesti nalogi naj si učenci pomagajo z vpisovanjem v preglednico. Skušajmo jih usmeriti v zapis enačbe z dvema neznankama.

5. Naloga ima 7 rešitev.

Koze (4)	Piščanci (2)
6	1
5	3
4	5
3	7
2	9
1	11
0	13

6. Naloga ima 4 rešitve.

Trinožni stoli	Štirinožni stoli
0	11
4	8
8	5
12	2

7. Za sestavo vrednosti po 4 € so 4 načini, za 5 € je 5 načinov, za 6 € 7 načinov in za 7 € 8 načinov.

Štetje

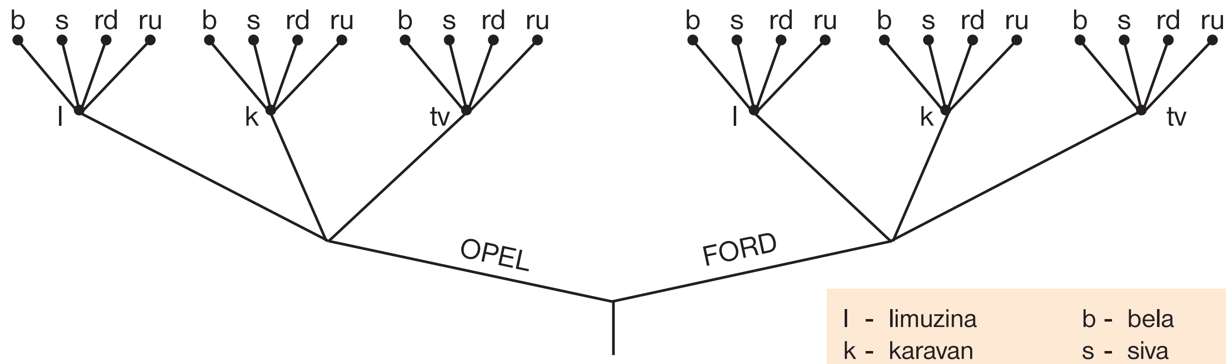
Številne izbire

S kombinatornim drevesom sistematično prikažemo vse možnosti v nekem kombinatornem položaju. Naloge rešujemo s sklepanjem, pri tem si pomagamo s kombinatornim drevesom in z njim nazorno nakažemo posamezne korake v odločanju. Učenec naj kombinatorno drevo tudi razloži. V zgledu gre za neodvisno izbiro, zato je število vseh mogočih izbir enako zmnožku vseh mogočih prvih (3), vseh mogočih drugih (2) in vseh mogočih tretjih (2) izbir, torej 3 · 2 · 2 = 12. Prvo nalogo, nalogo o izbirnih predmetih, lahko učenci uspešno rešijo, četudi drevesa ne narišejo. Število izbir je namreč enako zmnožku števil vseh predmetov, ki so na voljo (4 · 3 · 2 = 24). Če pa se odločijo za risanje drevesa, naj ga zaradi pomanjkanja prostora v delovnem zvezku narišejo na dodaten list ali v zvezek, ki ga imajo za ta predmet.
Teh točk je dvanajst.

Irena lahko izbere darila na 12 načinov.
3 · 2 · 2 = 12
a) Moder nahrbtnik lahko izbere v šestih primerih. To izračunamo kot zmnožek 3 · 2 · 1 = 6.
Irena izbira med 3 zvezki, med 2 nalivnima peresoma in 1(modrim) nahrbtnikom.
b) V 9 izborih.

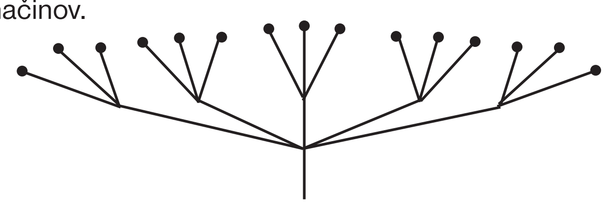
1. a) Peter lahko izbira med 24 načini.
b) V 8 izborih.
c) V 12 izborih.
č) Na voljo ima 18 izbir.

2. a) Oče ima 24 različnih možnosti.
b) Če ne izbere terenskega vozila, ima 16 možnosti.
c) Takrat ima 20 različnih možnosti.



l - limuzina	b - bela
k - karavan	s - siva
tv - terensko vozilo	rd - rdeča
	ru - rumena

3. Na 15 načinov.



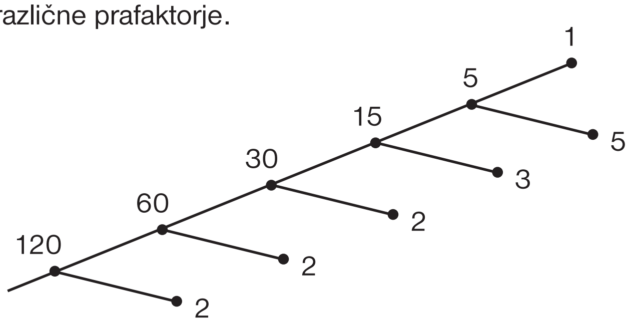
4. Skupaj z učenci ponovimo pravila za deljivost števil s 3 in 5, deljivost s 7 pa naj preverijo sami z deljenjem.
a) 135, 153, 315, 351, 513, 531; (3 · 2 · 1 = 6)
b) 135, 315
c) 315
č) 315, 351

Štetje

5. Učence navajamo, da se zapisovanje naravnih števil iz danih števk začne pri osnovnem razporedu, kjer so števila urejena po velikosti.

Zapišeš lahko 27 štirimestnih števil. Ta štirimestna števila so:
5333, 5334, 5335, 5343, 5344, 5345, 5353, 5354, 5355, 5433, 5434, 5435, 5443, 5444, 5445, 5453, 5454, 5455, 5533, 5534, 5535, 5543, 5544, 5545, 5553, 5554, 5555.

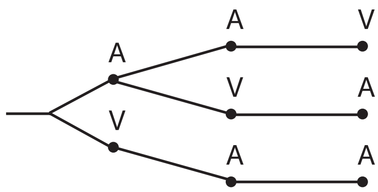
6. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Dobimo tri različne prafaktorje.

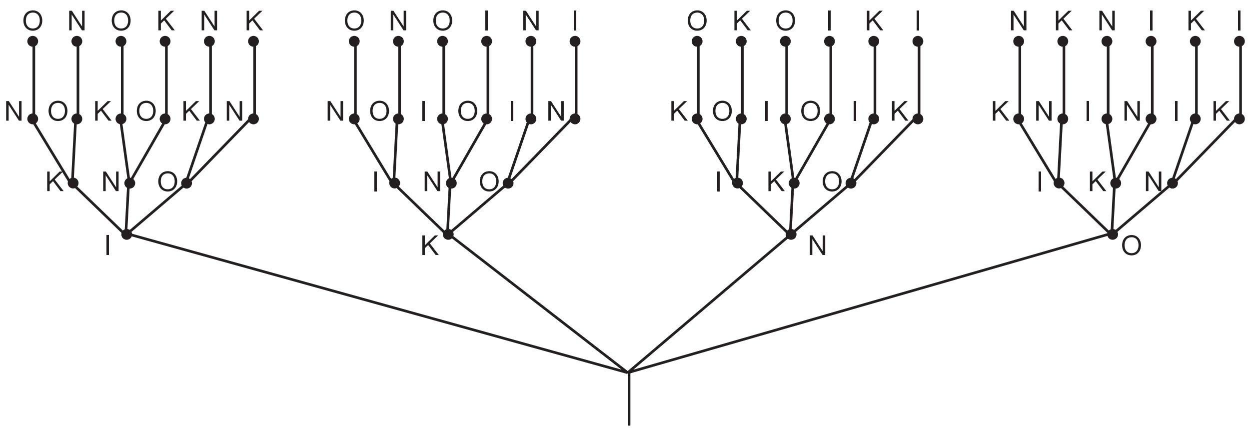


7. Vseh mogočih izidov je 36.

8. Pri oblikovanju permutacij črk je osnovni razpored tisti, v katerem so črke urejene po abecedi.

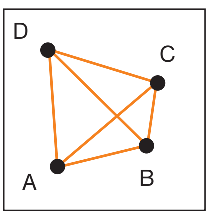
a) Na 3 načine (AAV, AVA, VAA).
b) Na 24 načinov.
IKNO, IKON, INKO, INOK, IOKN, IONK
KINO, KION, KNIO, KNOI, KOIN, KONI
NIKO, NIOK, NKIO, NKOI, NOIK, NOKI
OIKN, OINK, OKIN, OKNI, ONIK, ONKI





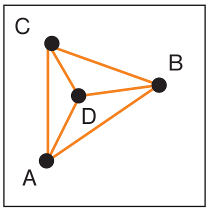
9. Način zapisovanja je pomemben za uspešno preštevanje likov, zlasti pri tej nalogi, kjer so dana oglišča trikotnikov. Ker osnovnošolci kombinatorike ne poznajo, bodo število trikotnikov ugotovili tako, da bodo prešteli vse trikotnike nad danimi točkami. Slika, ki nastane z risanjem, ni pregledna, zato beležimo trikotnike tako, da na sliki označimo oglišča in izpišemo trikotnike. Ta naloga je primerna za delo v skupinah.

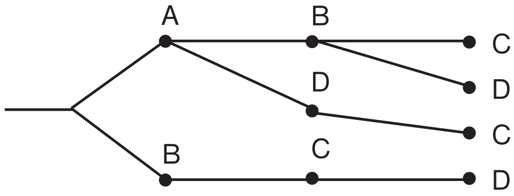
a) ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD
Trikotniki so štirje.



Štetje

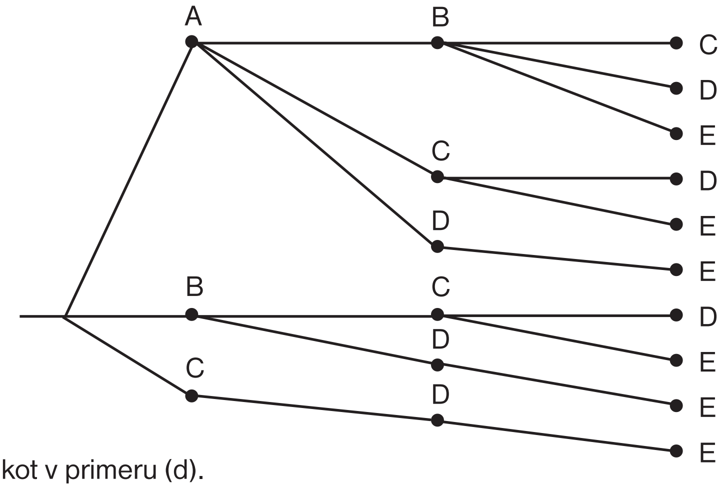
b) ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD



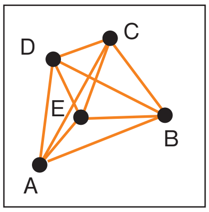


Trikotniki so štirje.

c) Dobimo tri trikotnike.
č) Ne.
d) ΔABC, ΔABD, ΔABE, ΔACD, ΔACE, ΔADE, ΔBCD, ΔBCE, ΔBDE, ΔCDE
Trikotnikov je 10.



e) Enaka rešitev kot v primeru (d).

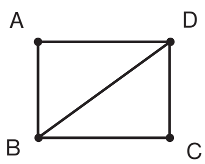


V obeh primerih pet točk določa 10 trikotnikov.
Da, razen v primerih, ko na isti premici ležijo tri točke ali več.

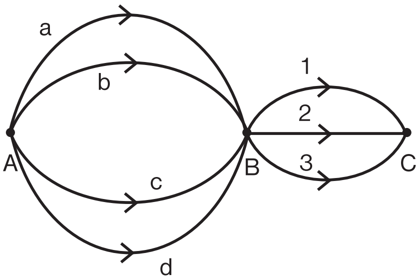
Iz kraja v kraj

Pri reševanju nalog iz kraja v kraj si učenci lahko pomagajo tako, da barvajo načine izbire prehoda iz kraja v kraj. To velja še posebno za naloge 5, 6 in 7. Število načinov lahko poskusijo zapisati s produktom ali z vsoto. V grafih G2, G3 upoštevamo, da lahko začnemo sprehod v kateri koli točki grafa in da lahko vsak sprehod opravimo v eno ali drugo smer. Števila iskanih sprehodov so torej: **G2** 2 · 4 = 8; **G3** 2 · 5 = 10. Za **G4** upoštevamo poleg prej navedenega še to, da imamo na začetku poti 3 različne možnosti, nato pa pri naslednjem razvejišču še 2. Sprehod po G4 lahko začnemo le v točkah B in D.

G2: 8 sprehodov (2 · 4 = 8)
G3: 10 sprehodov (2 · 5 = 10)
G4: 12 sprehodov (2 · 3 · 2 = 12). Na začetku poti so
3 različne možnosti, nato pa pri naslednjem razvejišču še 2.



1. Na 6 načinov.
2. Najmanj 12 kostanjev.
3. Na 12 načinov. Ti načini so *a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3, d1, d2, d3*.
   Število različnih poti: 4 · 3 = 12.



4. a) Na 12 načinov.
   b) Na 144 načinov (12 · 12 = 144).
5. Na 8 načinov.
6. Na 12 načinov.
7. Pot izbiramo med 3 različnimi potmi, ki izhajajo iz A, nato na vsaki izmed naslednjih dveh točk izbiramo med dvema, iz točk H, I in J pa vodi do cilja le še po ena pot.
   V grafu je 3 · 2 · 2 · 1 = 12 različnih poti od začetne do končne točke.

Pri nalogah 8, 9 in 10 si učenci lahko pomagajo z risanjem, pri katerem ekipo, šahista ali odličnjaka označijo s točko, povezave med njimi pa naj ponazarjajo vse njihove mogoče tekme, partije ali rokovanja. Ali pa naloge rešijo praktično, tako da te točke predstavijo učenci sami, za povezave pa uporabijo vrvico, roke …

8. Odigrali bodo 10 tekem.
9. Odigranih je bilo 21 partij.
10. Župan je stisnil roko štirikrat. Vsi skupaj so si segli v roko desetkrat.

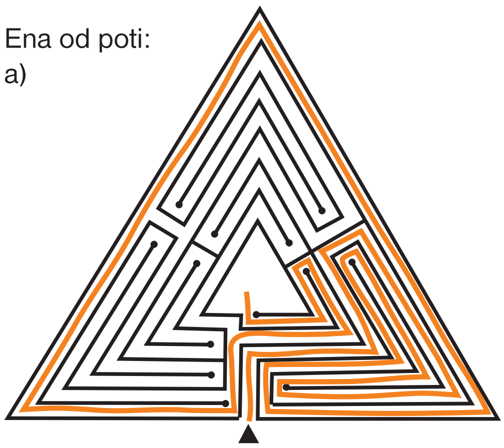
Vražji labirinti

Učenci zelo radi rišejo in rešujejo labirinte. Svoje labirinte naj predstavijo na plakatu, dodatne pa lahko poiščejo še v kakšni knjigi.

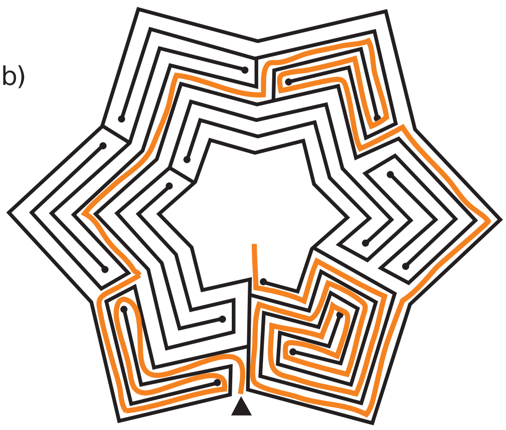
1. Miška lahko pride do 11 koščkov sira.

2. Poti, ki so jih učenci našli, naj primerjajo med seboj.

   Ena od poti:
   a)



b)

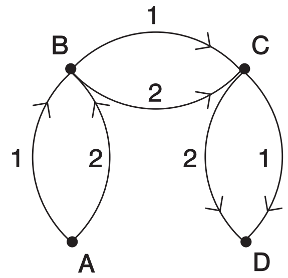


Druga pot: A, C, E, G, J, H, I, K, M
Tretja pot: A, C, E, G, H, J, I, K, M
Četrta pot: A, C, E, G, J, I, K, M

Štetje

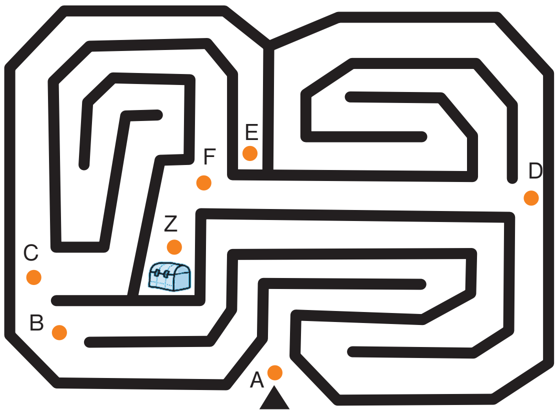
1. Na treh razpotjih naj učenci določijo točke A, B, C, na vhodu v notranjost, kjer je sir, pa točko D. Nato narišejo graf in točke ustrezno povežejo ter preštejejo število različnih poti. To število bo nekaterim učencem uspelo zapisati tudi z zmnožkom ali vsoto ($2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 8$).

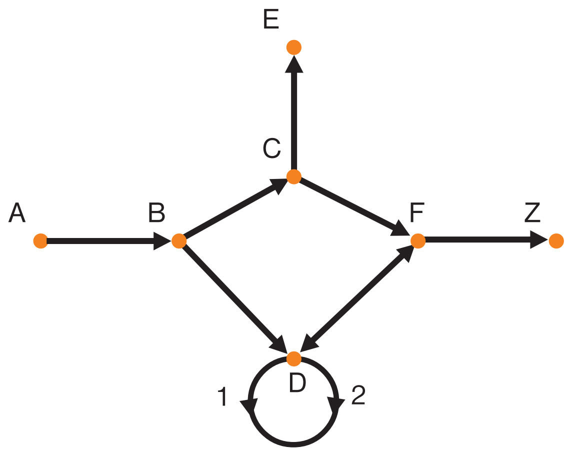
Miška lahko pride do sira na 8 načinov.



2. Pri iskanju poti do zaklada naj učenci določijo sedem točk grafa, ki predstavljajo: A – vhod v labirint; B, C, D – razvejišča poti; E – konec slepe poti v labirintu; Z – mesto, kjer leži zaklad. Nato naj narišejo graf, ki ga dobijo, če te točke povežejo med seboj. Iz grafa odberejo štiri različne poti.

Iz grafa razberemo 4 različne poti (ABCFZ, ABDFZ, ABD$_1$DFZ, ABD$_2$DFZ). Pri tem upoštevamo, da lahko gremo po zanki v točko D na dva načina, v eno (D$_1$) ali drugo (D$_2$) smer.





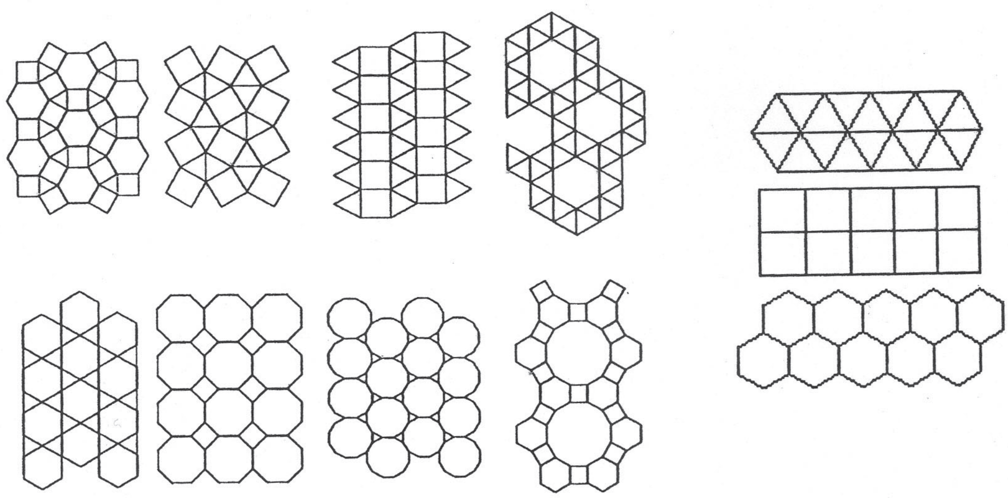
Rešitve nalog si učitelj lahko pripravi na grafoskopsko folijo. Če se pokaže potreba, lahko naloge o labirintih (grafih) rešuje učitelj skupaj z učenci (na grafoskopsko folijo).

Učenci lahko v skupinah izdelajo plakat in ga razstavijo v učilnici ali na hodniku in s tem še javno predstavijo ta izbirni predmet. Primerne teme so: Velika števila, Labirinti, Številne izbire …

Za domačo nalogo naj o teh temah poiščejo še kaj na medmrežju ali v knjigah, sestavijo podobne naloge, npr. križanko, ki jo razmnožimo in razdelimo učencem, da jo rešijo …
Vse to (skupinsko delo, raziskovalno – samostojno delo, individualno delo) lahko ocenimo po merilih, ki smo jih učencem predstavili v uvodni uri.

Vzorci okrog nas

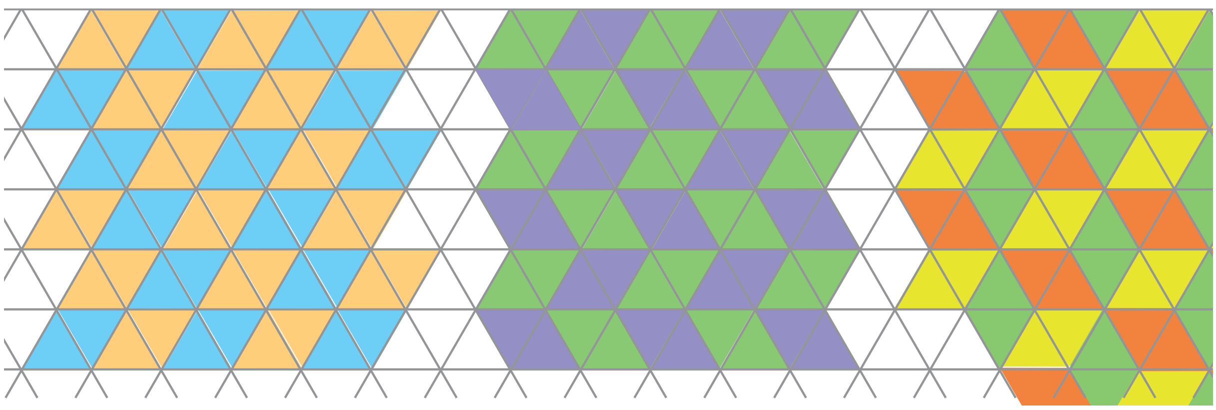
Učenci najprej spoznajo, kaj pomeni tlakovati ravnino. Pomagamo si lahko z nasprotnim zgledom (med krogi, ki se dotikajo, ostajajo nepokriti prostori).
Učenci naj sodelujejo pri ugotavljanju, kje še najdemo podobne vzorce (na primer vzorci na blagu).
Pri tlakovanju s pravilnimi večkotniki naj si pomagajo z izrezanimi liki. Opazujejo naj vlogo kotov. Naučijo naj se tudi razlikovati različne simetrije pri vzorcih.
Dogovorimo se, kdaj se bomo omejili na tlakovanje s samimi skladnimi liki in kdaj bomo tlakovali z različnimi zvrstmi likov. Vedoželjne učence bo morda zanimalo, ali je mogoče ustvarjati kombinacije za tlakovanje samo z omenjenimi pravilnimi večkotniki. Spodnja slika prikazuje vse vrste tlakovanj, pri katerih se v vsakem oglišču kombinacija likov ponovi. Med temi liki je tudi pravilni dvanajstkotnik.



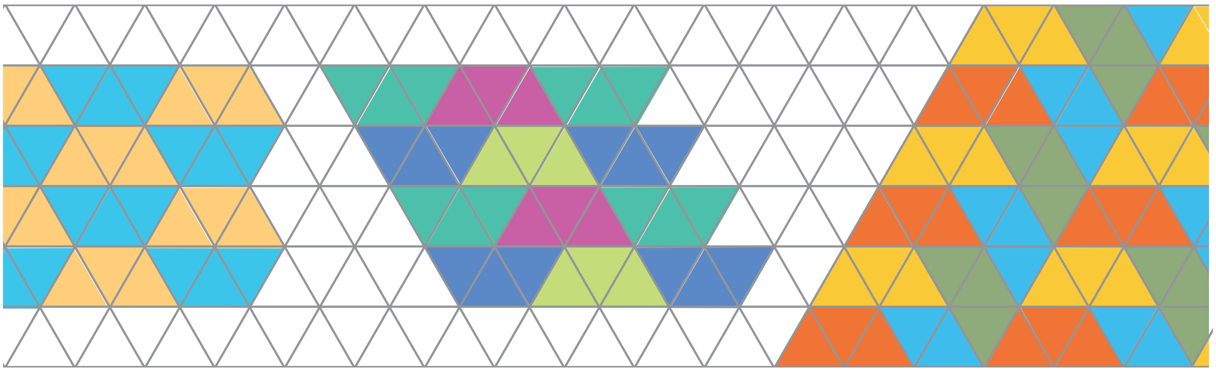
Sestavljamo nove like za tlakovanje

Učenci naj izrežejo več skladnih likov iz papirja in raziskujejo, kako jih je mogoče tlakovati (parketki).
Pri ustvarjanju likov in za prikazovanje rešitev naj uporabljajo priložene mreže.
Ker je nalog več, lahko skupine učencev rešujejo različne naloge.
Ta del se da razširiti, saj lahko iz štirih, petih … kvadratkov izdelamo pisano množico likov z veliko kombinacijami parketiranja.
Rešitve nalog:

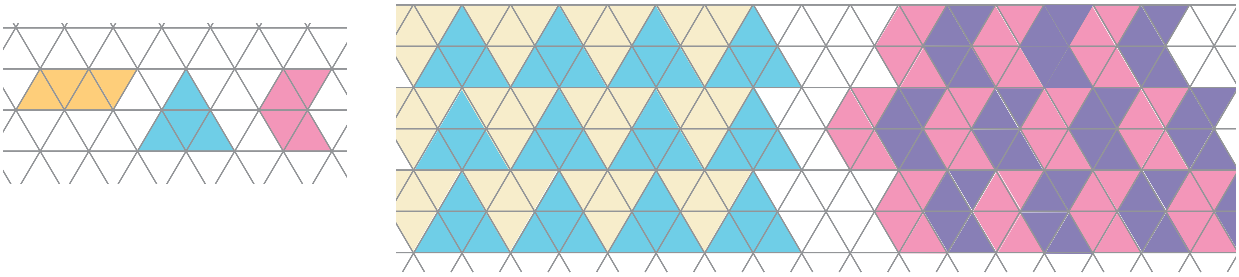
1.



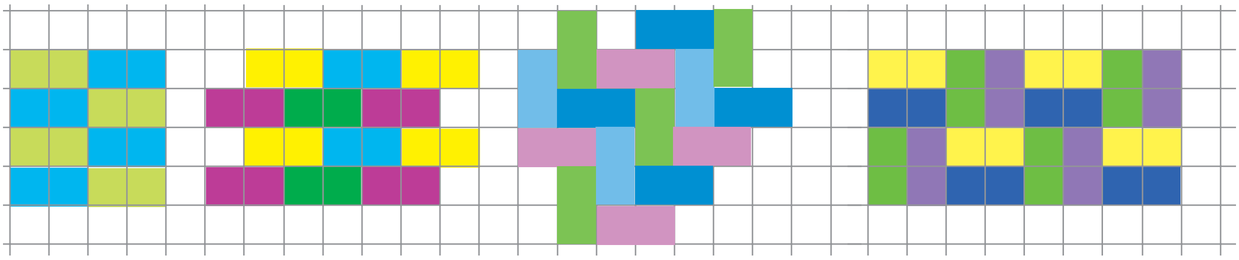
2.



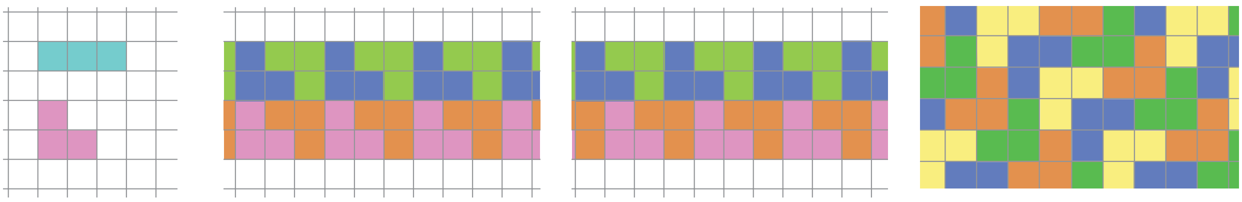
3. Liki in dva zgleda tlakovanja.



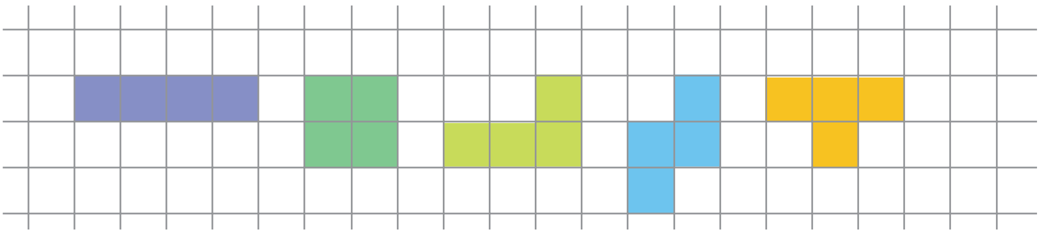
4.



5. Lika in nekaj zgledov tlakovanja.



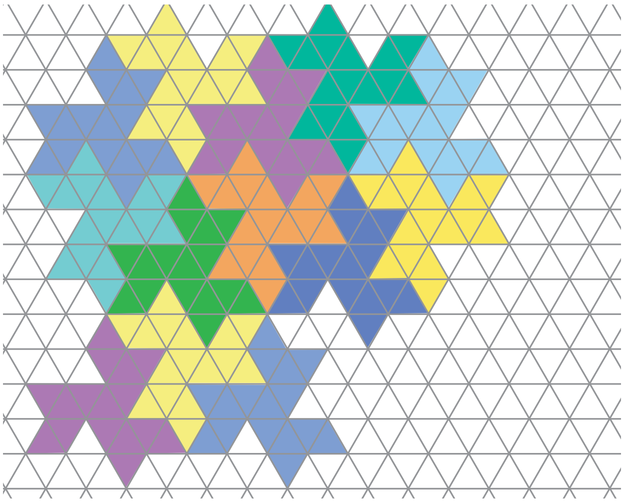
6.

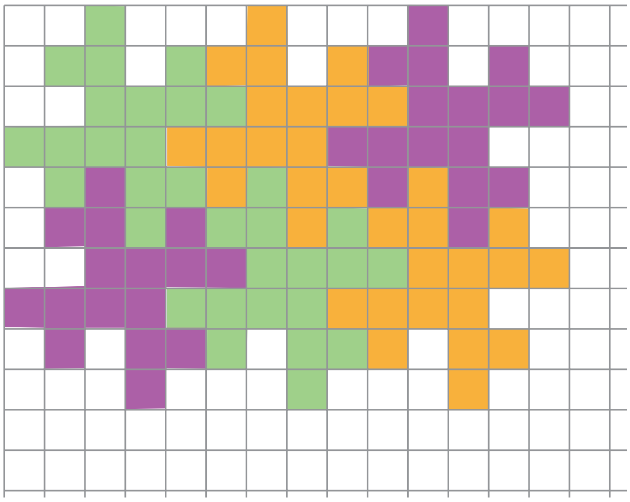


Vseh mogočih vrst tlakovanja je veliko. Naloga je postavljena kot odprt problem.

Nazobčani liki

Tudi pri tej nalogi lahko učenci na pomožni mreži najprej lik izdelajo, nato nekaj takih likov izrežejo iz papirja in ugotovijo, kako jih je treba zlagati. Rešitev naj z barvami predstavijo na mreži. Pri tem si lahko pomagajo tako, da najprej poudarijo oglišča velikih trikotnikov ali kvadratov, potem pa na stranicah trikotnika (kvadrata) ciklično izmenično dodajajo in odvzemajo mali trikotnik (kvadrat).





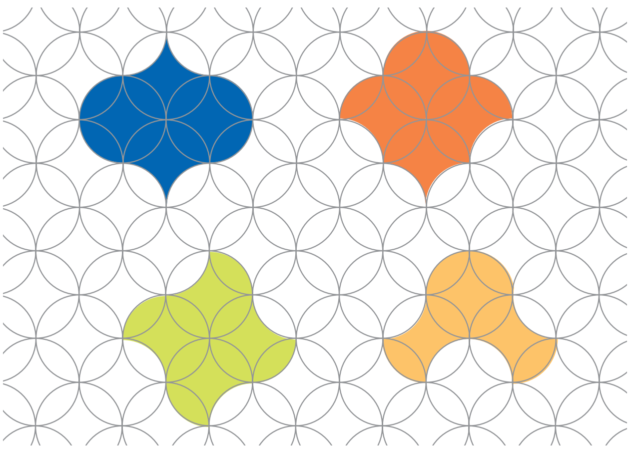
To nalogo je mogoče v matematični delavnici v višjih razredih nadgraditi pri poglavju Fraktali.

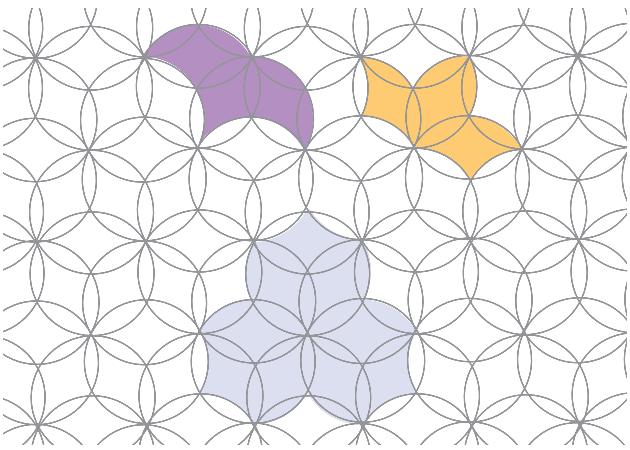
Parketki iz vetrnic

Če imajo učenci pri pouku dostop do medmrežja, lahko za uvod poiščejo pod geslom *tessellation* zglede vzorcev iz zgodovine.
Druga navodila za reševanje nalog so ista kot pri prejšnjih zgledih. Težavnost reševanja je treba prilagoditi učencem (nekateri so ustvarjalnejši, drugi raje samo barvajo vzorčke).

Tudi okrogli vzorci so lepi

Ustvarjalnejši učenci lahko z uporabo priloženih mrež izumljajo tudi svoje like za tlakovanje.
Rešitve nalog 2 in 4:





Ustvarjamo nove like

Ta del je zahtevnejši. Priporočam, da učenci predelajo lik v novega tako, da dobijo kvadratno ali trikotniško mrežo na barvastem papirju, nato pa razrezani lik po navodilih iz naloge na novo sestavijo, delce prilepijo na drug papir in novi lik izrežejo. S polaganjem na papir lahko narišejo in izrežejo več skladnih novih likov in jih nato zlagajo v vzorec. Lahko pa sproti rišejo vzorec s premikanjem lika tako, da se ustrezni robovi stikajo.
Pouk je lahko diferenciran: nekateri učenci naj izdelajo lik po dani predlogi, drugi pa se lahko preskusijo v izvirnem tlakovanju.
Če učenci izdelujejo lik po predlogi, ga je smiselno s fotokopiranjem povečati.

Čarovnije s trikotniki

Navodilo je podobno kot pri poglavju Ustvarjamo nove like.

Vzorci so oživeli

Sklepni del je namenjen ustvarjanju pozitivnega čustvenega odnosa učencev do matematike. Začutili naj bi lepoto matematike, njeno povezavo z umetnostjo, njen pomen v različnih kulturah zaradi uporabnosti in lepote. Če ne prej, bi bilo zdaj primerno poiskati na medmrežju (pod geslom *tessellation*) celo galerijo zanimivih vzorcev. Učencev naj ne bi silili k izdelavi kakšnega zahtevnega vzorca. To možnost jim je treba samo ponuditi in jih zanjo navdušiti.

Karte

1. Ker je vsakdo vsaj enkrat pravilno uganil in so imeli različno število pravilnih odgovorov, je eden izmed njih pravilno uganil barve vseh treh kraljev, eden barvi dveh, eden pa le barvo enega kralja.
   - Če bi Jure pravilno uganil barve vseh treh kraljev, bi Žan uganil le barvo srednjega kralja, Marko pa ne bi uganil barve nobenega kralja.
   - Če bi Marko pravilno uganil barve vseh treh kraljev, ne bi bil noben Juretov odgovor pravilen.
   - Žan je torej pravilno uganil barve vseh treh kraljev, in sicer srčevega, karovega in križevega. Jure je pravilno uganil barvo srednjega kralja, Marko pa, da je prvi kralj v vrsti srčev, tretji pa križev.

2. Glede na to, kar je povedala Ana, bi lahko imeli Gorazd, Leon in Nik skupaj največ 4 + 3 + 2 = 9 pravilnih odgovorov, saj ni imel nihče samih pravilnih odgovorov, najmanj pa 1 + 2 + 3 = 6 pravilnih odgovorov, nihče pa tudi ne samih napačnih. Če pogledamo, kako so uganjevali položaj posamezne karte, pa bi lahko imeli največ 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 pravilnih odgovorov. To pomeni, da je vseh pravilnih odgovorov 6 ali 7.
   Kmalu spoznamo, da niso imeli 6 pravilnih odgovorov. Srce na prvem mestu in pik na petem sta morala biti pravilno uganjena po dvakrat, sicer bi imeli največ 5 pravilnih odgovorov. Ker pa je bila vsaka karta vsaj enkrat pravilno uganjena, je pravilnih odgovorov 7.
   Vemo torej, da je na prvem mestu srce, na petem pik. To pomeni, da je tretja karta križ in je bila enkrat pravilno uganjena. Če je druga karta karo, je četrta joker. Tedaj ima Leon 4 pravilne odgovore, Gorazd 2 in Nik enega. Če je druga karta joker, je četrta karta karo. Tedaj ima Leon spet 4 pravilne odgovore, Nik 2 in Gorazd 1 pravilen odgovor.
   Posameznik je lahko imel največ 4 pravilne odgovore.

Vitezi in oprode

1. Drago je gotovo oproda, saj se vitez ne bi zlagal, da so vsi oprode. In vendar vsi trije niso oprode, sicer bi bila Dragova izjava resnična, torej je izmed preostalih dveh vsaj eden vitez. Če bi bila viteza oba, bi bili dve izmed treh izjav neresnični, to pa ni mogoče. Torej je vitez le eden. Elvisova izjava je resnična, Frančkova pa ne. Franček je oproda.

2. Če Oton ne bi govoril resnice, bi morali biti resnični Matejeva in Nikova izjava, a to ni mogoče, saj je na otoku le en zdravnik. Torej je Oton govoril resnico, zato sta drugi dve izjavi lažni. Ker nista zdravnika ne Matej ne Nik, je zdravnik Oton.

3. Samo je gotovo oproda, saj vitez ne bi izjavil kaj takega. Hkrati pa vemo, da vsi niso oprode. Če je Tine vitez, je oproda le Samo. Toda obe izjavi, Vidova in Tinetova, ne moreta biti resnični, zato Tine ni vitez.
   Če je vitez Vid, je vitez tudi Zorko, saj sta Samo in Tine oprodi, o katerih govori Vid.
   Toda Vid je lahko oproda. Ker pa vsi štirje niso oprode, je tudi v tem primeru vitez Zorko. Samo, Tine in Vid so lagali.
   Ugotovili smo, da je Zorko zagotovo vitez.

4. Če bi bil Andrej vitez, bi bila oba, Blaž in Dejan, viteza, toda Andrejev odgovor na drugo vprašanje ne bi bil resničen. To ni mogoče, saj vitezi ne lažejo. Andrej je torej oproda in njegova odgovora sta lažna. Iz odgovora na drugo vprašanje sklepamo, da je vitez Blaž. To pomeni, da Dejan ni vitez, saj bi bil v nasprotnem primeru prvi odgovor oprode Andreja resničen.
   Dejan je oproda.

5. Denimo, da je oproda Gorazd. Tedaj je Jan vitez in je res, kar je povedal. To pomeni, da je oproda Klemen. Če pa je vitez Gorazd, je Jan oproda in ni res, kar je povedal. Gorazd in Klemen nista viteza ali oprodi, oproda je Klemen.
   Klemen je torej v vsakem primeru oproda.

Vrstni red je pomemben

1. Ker je Anja obiskala Vido ob 8. uri, a ni bila prva na obisku, jo je obiskala ob 8. uri zvečer. Nika in Teja nista bili obe na obisku pozneje kot Anja, zato je vsaj ena od njiju obiskala prijateljico že dopoldne. Ena od prijateljic je obiskala Vido med Anjinim in Katjinim obiskom, zato je bila Katja na obisku dopoldne, in sicer prva, ob 9. uri.
Ker Nika ni obiskala Vide v času med obiskoma Katje in Teje ter je bila Katja na obisku prva, je bila Teja na obisku dopoldne, in sicer ob 11. uri. Nika je prišla k prijateljici ob 10. uri zvečer in jo je torej obiskala zadnja. Po vrsti so si sledile: Katja, Teja, Anja in Nika.

2. Ker se je Vida uvrstila dve mesti pred Tino, so tri možnosti:

1. Vida	2. Vida	3. Vida
3. Tina	4. Tina	5. Tina

Sara gotovo ni prva glede na pripombo, ki jo je dala. Denimo, da se je uvrstila na 2. mesto. Tedaj bi vedela, da se Vida ni uvrstila na 2. mesto, in bi sklepala, da sta možni delni uvrstitvi:

1. Vida	2. Sara
2. Sara	3. Vida
3. Tina	5. Tina

V tem primeru ji podatek, da se Urška ni uvrstila na 1. mesto, ne bi pomagal, saj ne bi vedela, ali naj ga uporabi v prvi ali drugi možnosti. Pripombe, ki jo je dala, torej ne bi mogla dati, če bi zasedla 2. mesto. Do podobnega sklepa pridemo, če privzamemo, da se je Sara uvrstila na 4. ali 5. mesto.
Sara se je torej uvrstila na 3. mesto. Tedaj je vedela, da se je uvrstila Vida na 2. mesto in Tina na 4. mesto. Podatek o tem, ali se je Urška uvrstila na 1. mesto ali ne, bi zadoščal, da bi poznala uvrstitev za vsako dekle. Urško bi postavila na 1. ali na 5. mesto, Zoro pa na mesto, ki bi ostalo.
Zora je seveda že od začetka vedela za vse tri možnosti uvrstitev Vide in Tine. Sarina pripomba ji je pomagala do sklepa, da se je Sara uvrstila na 3. mesto, saj v drugih primerih take pripombe ne bi mogla dati. Tako je ugotovila, da si od drugega do četrtega mesta sledijo Vida, Sara in Tina. Preden je slišala Sarino pripombo, Zora ni vedela, ali je Urška prva ali ne. To pomeni, da se Zora ni uvrstila na 1. mesto. Če bi se uvrstila na prvo mesto, bi že prej vedela, da Urška ni prva. Zora se je uvrstila na 5. mesto.
Vrstni red je torej: Urška, Vida, Sara, Tina, Zora.

3. Obrniti je treba prvi in tretji kartonček z leve. Če je na drugi strani prvega kartončka narisan kvadrat in je tretji kartonček na drugi strani moder, je odgovor na zastavljeno vprašanje »da«, v drugih primerih pa »ne«.

Resnica pride na dan

1. Gorazdova in Jankova izjava ne moreta biti resnični hkrati, zato je le eden od njiju povedal resnico. Če bi govoril resnico Gorazd, bi bila resnična tudi Milanova izjava in bi govorila resnico dva, vendar to ne drži. Torej je govoril resnico Janko, Gorazd in Milan pa ne. Sklepamo, da je čokolado ukradel Milan.

Lahko bi sklepali tudi drugače. Ker Gorazdova in Jankova izjava ne moreta biti hkrati resnični, je eden od njiju govoril resnico. To pomeni, da se je Milan zlagal in je torej ukradel čokolado.

2. Gospod Pek ni bil zidar, garažo mu je sezidal prijatelj, poklicni zidar. Priimek se ni ujemal s poklicem, zato je bil gospod Pek po poklicu kuhar. Sklepamo še, da je bil gospod Zidar po poklicu pek, gospod Kuhar pa zidar.

3. Izjave gospa so si nasprotovale, saj je vsaka govorila o tem, kdo stanuje v hiši številka 13. To pomeni, da je bila le ena od izjav resnična. Ker je Marta vedno govorila resnico, je bila torej resnična le njena izjava. Sklepamo, da Marta ni živela v hiši številka 11, saj bi v tem primeru govorila o sebi in trdila, da živi v sosednji

hiši. Tako tudi vemo, da izjava, ki jo je dala gospa iz hiše številka 11, ni resnična. Marta torej ne živi v hiši številka 13 – živi pa v hiši številka 15. Njena izjava je resnična: Jelka res živi v hiši številka 13. V hiši številka 11 živi Lucija.
Povzemimo: v hiši številka 11 živi Lucija, v hiši številka 13 Jelka, v hiši številka 15 pa Marta.

Prijatelji

1. Iz (a) sklepamo, da se Irena ne piše niti Rac niti Čer. Torej se piše Kač.

	Čer	Kač	Rac	Film	Gledališče	Opera
Irena	X	O	X			
Marko		X				
Mojca		X				
Film						
Gledališče						
Opera						

Ker v (b) preberemo, da se Marko ne piše Rac, se torej piše Čer, saj smo že ugotovili, da se Irena piše Kač. Tako ugotovimo, da se Mojca piše Rac. Upoštevamo še (c), da družina Rac ni bila v gledališču, torej si Mojca ni ogledala gledališke predstave.

	Čer	Kač	Rac	Film	Gledališče	Opera
Irena	X	O	X			
Marko	O	X	X			
Mojca	X	X	O		X	
Film						
Gledališče			X			
Opera						

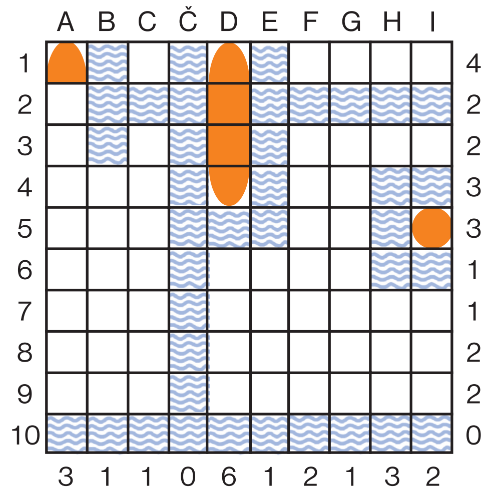
Končno upoštevamo še (č): Očitno si je družina Čer ogledala filmsko predstavo, torej je bil Marko v kinu. Poved o gospe Kač je navedena zgolj zato, da izvemo priimek, ki ga v drugih povedih ni.

	Čer	Kač	Rac	Film	Gledališče	Opera
Irena	X	O	X	X		
Marko	O	X	X	O	X	X
Mojca	X	X	O	X	X	
Film	O	X	X			
Gledališče	X		X			
Opera	X					

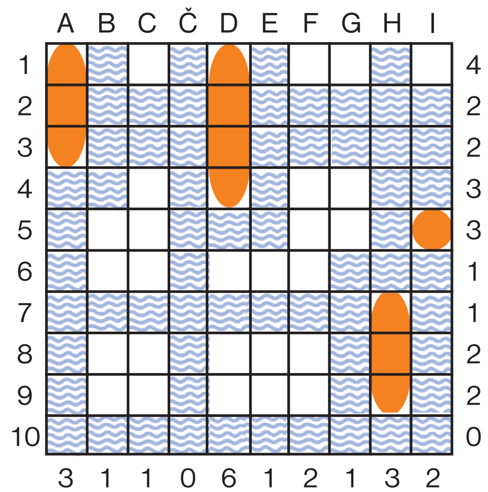
Če pogledamo zadnjo vrstico v zgornji desni manjši preglednici, vidimo, da mora biti v praznem polju znak **O**. Torej si je Mojca ogledala operno predstavo. V srednjem stolpcu iste manjše preglednice pa mora biti znak **O** v polju, ki povezuje *gledališče* in ime *Irena*.
Povzemimo: Irena Kač je bila v gledališču, Marko Čer si je ogledal gledališko predstavo, Mojca Rac pa operno.

Potapljanje ladjic

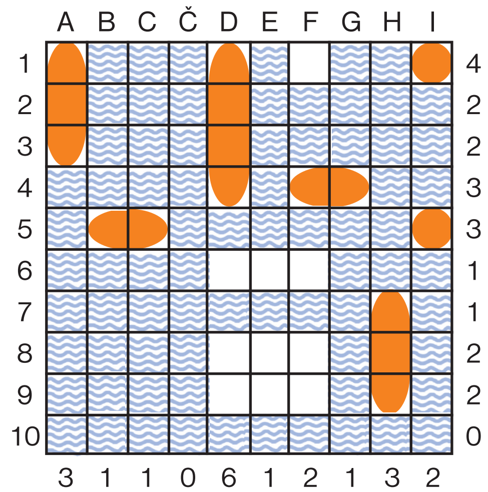
1. a) V 1. vrstici bodo zasedena štiri polja, vendar skupaj ne bodo sestavljala čezoceanske ladje. Čezoceanska ladja bo lahko le v stolpcu D, ker je samo tam na voljo dovolj polj. V stolpec Č ne sega nobena ladja, zato se narisani del ladje v polju D2 gotovo razteza še v D1 in D3. Tako zasedemo tri od šestih polj stolpca D. Ker pa je v tem stolpcu čezoceanska ladja, sega ta od D1 do D4. Ladja, katere del je v polju A1, se razteza vsaj še v polje A2, zato nobeno drugo polje v 2. vrstici ne more biti del kake ladje. Pobarvajmo polja, kjer zagotovo ne bo ladij ali njihovih delov.



V 4. in 5. vrstici ni več na voljo dovolj polj za križarko. Križarki sta lahko le v stolpcu A (od A1 do A3) in v stolpcu H (od H7 do H9).

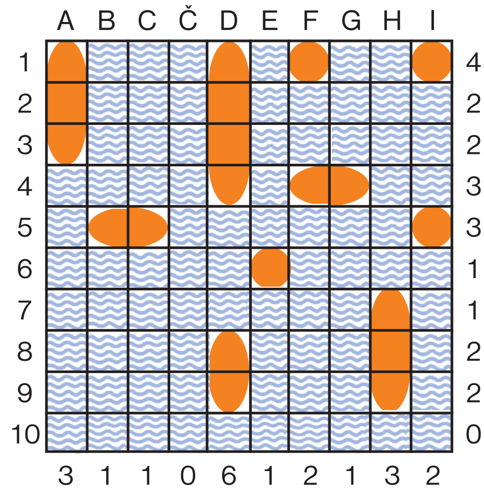


Tako je torej jadrnica v polju I1, saj morata biti v stolpcu I zasedeni dve polji, v 1. vrstici pa je še ena jadrnica, ker morajo biti v tej vrstici zasedena 4 polja. To pomeni, da je poleg teh dveh jadrnic in jadrnice v polju I5 na mreži le še ena jadrnica. V 4. vrstici moramo zasesti še dve polji. Ker ne smemo postaviti dveh jadrnic, je v tej vrstici jahta (F4, G4). Tudi v 5. vrstici je jahta (B5, C5), saj ne more biti tik ob jahti v 4. vrstici.

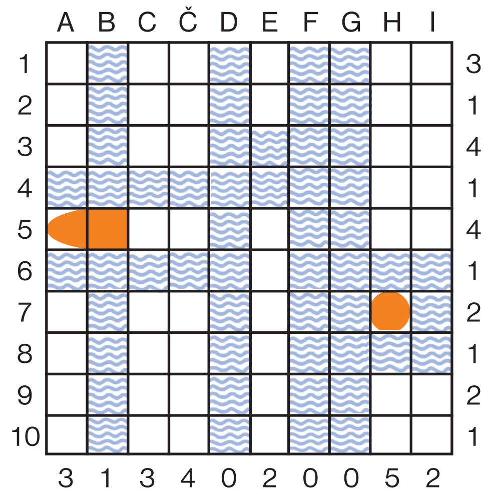


Logika

Vidimo, da lahko v 1. vrstici postavimo jadrnico polje F1 in da so zato polja F6, F8 in F9 prazna. Zasesti moramo še po eno polje v 6., 8. in 9. vrstici. V stolpec D moramo postaviti še eno jahto, saj dveh jadrnic ne smemo več postaviti. Jahta je v poljih D8 in D9. To pomeni, da bo polje D6 ostalo prazno. V 6. vrstici je jadrnica v polju E6.

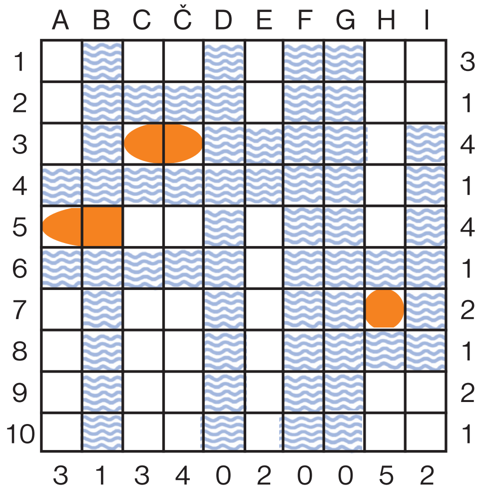


b) V stolpcu B je zasedeno le eno polje, zato se ladja, katere del je v B5, razteza vsaj še v polji A5 in C5, morda pa tudi v Č5. V vsakem primeru so polja od A4 do Č4 in polja od A6 do Č6 prazna, saj mejijo na ladjo. V stolpcih D, F in G ni zasedeno nobeno polje.

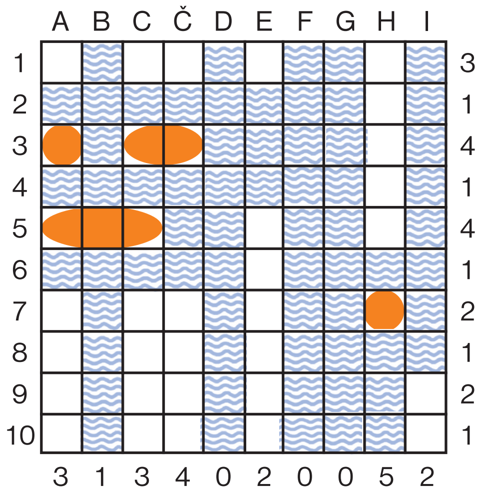


Ne križarke ne čezoceanke ne moremo postaviti v nobeno vrstico, razen v 5., saj v njih ni dovolj prostih polj, ki bi se držala skupaj. Ni ju mogoče postaviti niti v stolpec A ali C, ker je v obeh po eno polje že zasedeno, čeprav polja C5 še nismo označili. Ne vemo namreč, ali sega ladja od A5 do C5 ali od A5 do Č5. Vsekakor pa imamo v obeh stolpcih na voljo le še po dve polji. Če pogledamo števila polj, ki jih lahko zasedemo v posameznih vrsticah in stolpcih, ugotovimo, da so križarki in čezoceanka postavljene nekje v 5. vrstici ter v stolpcih Č in H.

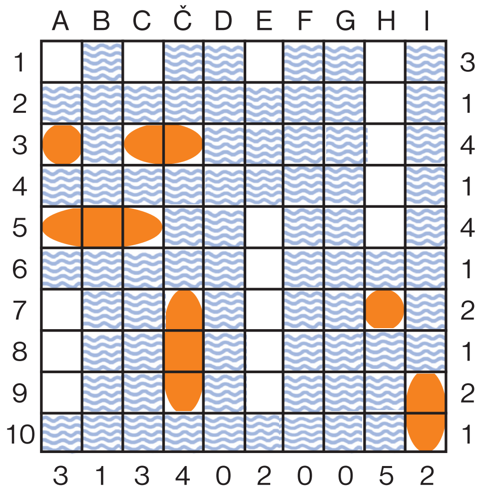
V 4. vrstici je zasedeno le eno polje – to mora biti polje H4. Če bi bilo zasedeno polje I4, ne bi mogli postaviti ladje v polja H3, H4 in H5. Tako ne bi imeli dovolj prostora za križarko ali čezoceanko v stolpcu H. Ko zasedemo polje H4, pa seveda ne moremo imeti ladij v poljih I3, I4 in I5, torej moramo v tretji vrstici zasesti A3, C3, Č3 in H3.



Premislimo, kje je lahko čezoceanka. V stolpcu Č ne more biti, saj imamo na voljo le še tri polja (Č3 je že zasedeno). Lahko je v 5. vrstici ali v stolpcu H. Denimo, da je v 5. vrstici. Tedaj ni v tej vrstici poleg polj, ki jih zaseda čezoceanka, nobeno drugo polje zasedeno z ladjami. Križarki bi morali biti torej v stolpcih Č in H, a v stolpcu Č križarka ne more biti, ker bi imeli na voljo le še dve polji (saj bi bili Č3 in Č5 že zasedeni). Čezoceanska ladja je torej v stolpcu H. Gotovo zaseda polja H2, H3 in H4, poleg teh pa še polje H1 ali H5. V drugi vrstici je zasedeno le polje H2. Ker ni zasedeno polje A2, je v polju A3 jadrnica. Prazno je tudi polje I1, saj meji na H2. V 5. vrstici je križarka, zaseda pa polja A5, B5 in C5. Tudi polji H9 in H10 sta prazni, saj je v tem stolpcu le pet polj zasedenih.



Vsa polja, razen polj I9 in I10 v stolpcu I, so prazna. Torej je v teh dveh poljih jahta. Polje I10 pa je edino zasedeno v 10. vrstici. To pomeni, da je križarka v poljih Č7, Č8 in Č9 ter da je polje Č1 prazno.



Niti v 7., 8. in 9. vrstici ni več na voljo polj, zato sta jadrnici v poljih A1 in C1, saj morajo biti tako v stolpcu A kot v stolpcu C zasedena tri polja. Drugih jadrnic ni več. To pomeni, da je polje E1 prazno in da se čezoceanska ladja razteza vzdolž polj H1, H2, H3 in H4. Zadnjo jahto postavimo še v polji E5 in E6.